Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

En utilisant le produit de Cauchy, calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$$

lorsqu'elle est définie.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Montrer que l'on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

Exercice 3

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

En admettant le résultat sur la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$, calculer :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{(i-j)^2}{2^{i+j}}$$

Exercice 2

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}.$$

Exercice 3

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{p,q\geqslant 1} \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 2$.

Exercice 2

Pour un $a \in \mathbb{R}$ fixé quelconque, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

   Montrer que $u_n = O(v_n)$.

2. On suppose que $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$.

   Montrer que $\sum u_n$ converge.

   On pourra comparer avec une série de Riemann judicieusement choisie.