Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème des séries alternés.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Exercice 3

1. On définit (u_n) par : $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Montrer que $\sum u_n$ converge.
   (b) Justifier que u_n n'est pas négligeable devant $1/n$.
2. Soit (u_n) une suites à termes positifs **et décroissante**. On suppose que $\sum u_n$ converge et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
   (a) Déterminer la limite de $S_{2n} - S_n$.
   (b) En déduire que $2nu_{2n}$ converge vers 0.
   (c) En déduire que u_n est négligeable devant $1/n$.
3. Que retenez-vous de l'exercice ?

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que la convergence absolue entraine la convergence. inégalité triangulaire dans le cas de convergence.

Exercice 2

1. Pour $\alpha > 0$, justifier la convergence de $\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$.

2. Montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x$

Exercice 3

Montrer la divergence de la série :

$$\sum \frac{\cos(\ln(n))}{n}$$

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Développement asymptotique à deux termes de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 2

Pour un $a \in \mathbb{R}$ fixé quelconque, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n = O(v_n)$.

2. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$.

Montrer que $\sum u_n$ converge.

On pourra comparer avec une série de Riemann judicieusement choisie.