Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que la convergence de $\displaystyle\int_I |\, f \,|$ implique celle de $\displaystyle\int_I f$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

Exercice 3

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} \mathrm{d}t$
2. Justifier la convergence de $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \mathrm{d}t$
3. Linéariser $\sin^3 t$ et en déduire la valeur de I.

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge vers un réel strictement positif.

Exercice 2

Déterminer la nature et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

Exercice 3

Soient $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$, $\displaystyle J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $\displaystyle K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}$

1. Justifier l'existence de I, J et K.
2. Montrer que $I = J$ et en déduire la valeur de ces intégrales à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^u$.
3. En déduire le calcul de K.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Critère de Bertrand en $+\infty$.

Exercice 2

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan t)^\alpha \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3

1. Justifier les existences et montrer l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}$$

2. En déduire la valeur commune de ces intégrales.