Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Dans une algèbre normée, que peut-on dire du produit de deux fonctions continues ?

Démontrer cette propriété.

Exercice 2

On note ℓ^1 l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ est absolument convergente. On le munit de la norme :

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $e^{(n)}$ la suite définie par ${e^{(n)}}_k = \delta_{n\,k}$.
   Montrer que $\mathrm{Vect}\left(e^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ est dense dans ℓ^1.
2. Soit a une suite réelle bornée. On considère l'application :

   $\varphi_a : \ell^1 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$.

   Montrer qu'elle est bien définie et que c'est une forme linéaire continue.
3. Montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^1 est de la forme φ_a où a est une suite réelle bornée.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel normé. A et B sont deux parties fermées disjointes et non vides de E.

Prouver qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que :

$$A \subset U \text{ et } B \subset V.$$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

Montrer que u est continue si et seulement si $\exists k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant \|x\|_E$$

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni $\|.\|_\infty$.
Montrer que l'application $u : E \to E$ définie par :

$$u(f) = g \text{ avec } g(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$$

est un endomorphisme continue de E

Exercice 3

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
Pour $r > 0$ on définit :

$$K_r = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, r)$$

Montrer que K_r est un compact.

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ normé par $\|.\|_\infty$.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments u de E telles que :

$$u(0) = u(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t = 1.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est fermé.
2. Montrer que la distance de 0_E à $\mathcal{F}$ n'est pas atteinte.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Que peut-on dire du produit de deux compacts ?

Démontrer cette propriété ?

Exercice 2

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur une matrice A pour qu'il existe une matrice M telle que $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties connexes par arcs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé et K une partie compacte de E. On considère une application $f : K \to K$ telle que :

$$\forall x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Prouver que f admet un unique point fixe dans K.