Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Montrer que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$||A|| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

définit une norme d'algèbre.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|.\|_\infty$.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments u de E telles que :

$$u(0) = u(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t = 1.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est convexe.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est fermé [1].
3. Montrer que la distance de 0_E à $\mathcal{F}$ n'est pas atteinte.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite bornée.

On suppose que la suite de terme général $u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}$ converge vers une limite ℓ.

1. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $2(\ell - a)$ aussi.
2. En déduire que (u_n) converge.

1. Il n'y a pas de lien avec la question précédente.

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Théorème de Bolzano-Weirstrass dans $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_\infty)$.

Exercice 2

On note ℓ^1 l'espace des suites réelles (x_n) telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument. On le munit de $|| x ||= \sum_{k=0}^{+\infty} | x_k |$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $e^{(n)}$ la suite définie par :

$$e^{(n)}{}_k = \delta_{k\,n} \qquad \textit{(où } \delta \textit{ est le symbole de Kronecker)}$$

Montrer que $F = \text{Vect}(e^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ est dense dans ℓ^1.

Exercice 3

On note E l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$ et à valeurs réelles qui sont lipschitziennes.

1. Montrer que E est un sous-espace vectorielle de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. Pour $f \in E$, on note $K(f) = \sup\limits_{0\leqslant x<y\leqslant 1} \dfrac{| f(x) - f(y) |}{y - x}$.

   Montrer que $N(f) = |f(0)| + K(f)$ définie une norme sur E.
3. Montrer que $\|.\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.

1. On pose $N(f) = \sup\limits_{t \in [0,1]} \mid f(t) + f'(t) \mid$.
   Montrer que N est une norme sur E.
2. On pose $N'(f) = \sup\limits_{t \in [0,1]} \mid f(t) \mid + \sup\limits_{t \in [0,1]} \mid f'(t) \mid$.
   Montrer que N' est une norme sur E.
3. Justifier que N' domine N.
4. Pour $f \in E$, on pose $g = f + f'$.
   Montrer que $e^x f(x) = \displaystyle\int_0^x e^t g(t) \mathrm{d}t$.
5. En déduire que N domine N'.

Exercice 3

A et B sont des parties de $\mathbb{K}^n$ (Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On suppose que :
— A est fermé et borné.
— B est fermé.

1. Montrer que $A + B := \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$ est fermé.
2. En considérant $A = \mathbb{Z} \cap \,]-\infty, -2]$ et $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
   Montrer que la propriété n'est plus valable si A et B sont seulement fermés tous les deux.