Sujet 1

Exercice 1 : Question de cours

Énoncé et preuve du théorème de Cesàro.

Exercice 2

Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = \sin^3(x)$.

Exercice 3

Soient $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$ telles que $x^2 + y^2 = 1$.
Montrer qu'il existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in I$:

$$x(t) = \cos(\theta(t)) \quad \text{et} \quad y(t) = \sin(\theta(t))$$

Sujet 2

Exercice 1 : Question de cours

Inégalité triangulaire pour les intégrales avec cas d'égalité lorsque f est continue.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 3

Déterminer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Sujet 3

Exercice 1 : Question de cours

Énoncé et preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 2

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

On suppose que :

$$\forall x \in [a, b],\ \ g'(x) \neq 0$$

a) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exercice 3

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x \geqslant 0,\ \ f \circ f(x) = 6x - f(x)$$